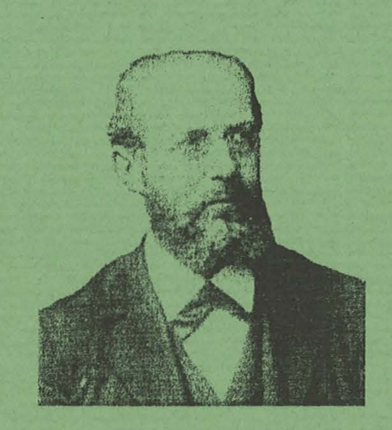
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Por

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO




ó

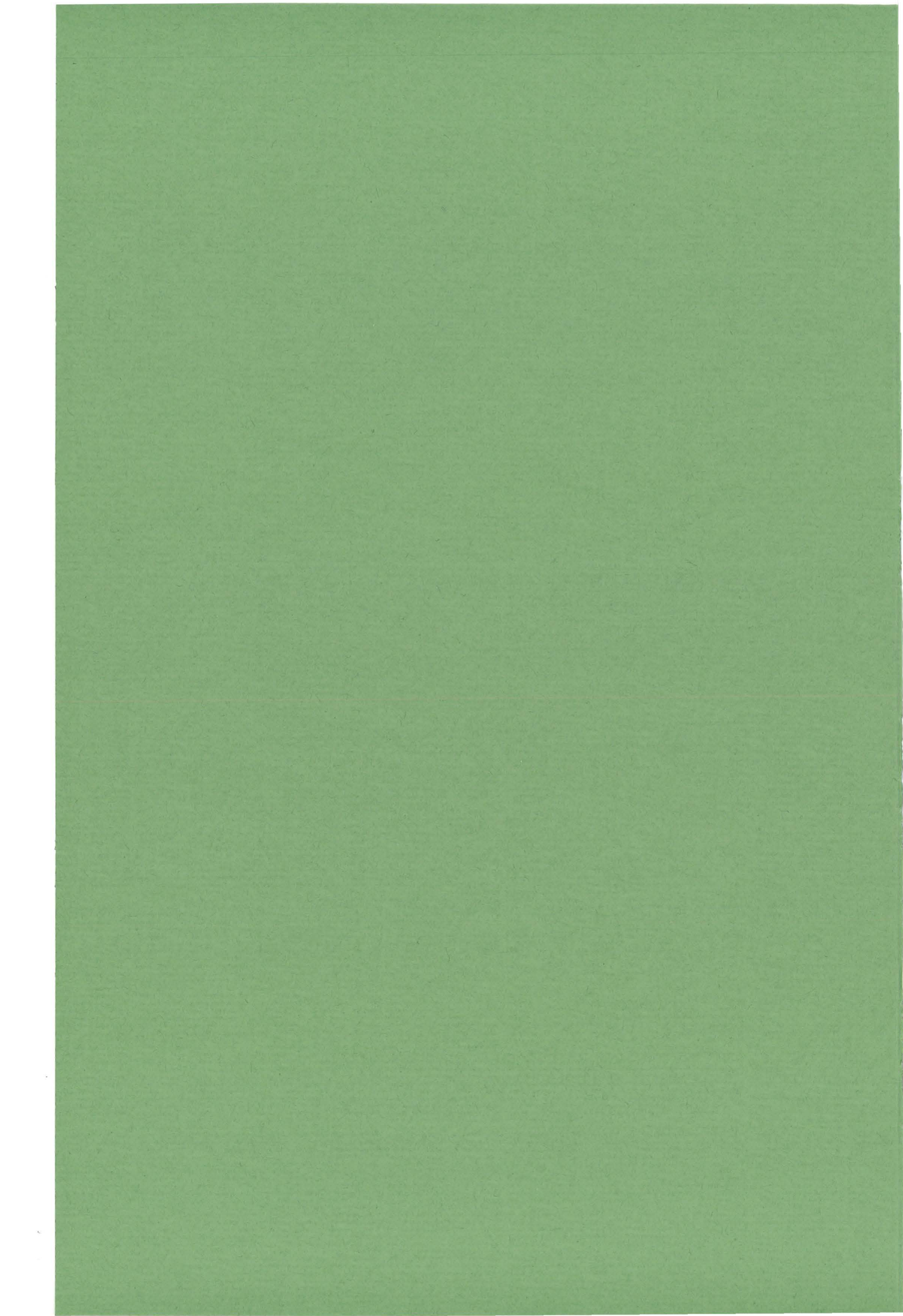
Dada una aplicación lineal $f:(E+,\cdot\Re)\to(F+,\cdot\Re)$

y fijado un vector $b\in F$

¿$\exists x\in E\,/\,f(x)=b$?

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-47-02



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Por

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-47-02

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

3 Área
47 Autor
02 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 199.01/ 3-47-02
ISBN-13: 978-84-9728-176-8
ISBN-10: 84-9728-176-4
Depósito Legal: M-43202-2005



Nota: *Si el quiere recordar la discusión de sistemas de ecuaciones lineales, dé la vuelta al cuaderno y lea las páginas impares.*

En este cuaderno se explica la discusión y solución de sistemas de ecuaciones lineales desde dos puntos de vista:

1.- Una teoría clásica en las páginas impares con algunos ejemplos resueltos, discusiones y soluciones dependientes de dos parámetros, un parámetro o sin parámetros.

Índice:

Definiciones.
Teorema fundamental de equivalencia.
Sistemas de Cramer.
Teorema de Rouché-Fröebenius.
Sistemas homogéneos.

2.- En las páginas pares, se desarrolla el mismo tema desde otro punto de vista, dada una aplicación lineal y fijado un vector del espacio final discutimos la existencia o no de un conjunto de originales para dicho vector.

Comenzamos estudiando el núcleo de la aplicación (originales del vector nulo del espacio final) que es subespacio vectorial del espacio inicial y terminamos con el conjunto origen de un vector no nulo, que no es subespacio vectorial.

El cuaderno está dispuesto de modo tal que al abrirlo por cualquier hoja, en la página impar está desarrollado el mismo tema que el la página par, basta con dar la vuelta al cuaderno para poder leer el tema o el ejemplo interpretado de uno u otro modo.

Por otra parte, se puede estudiar el tema sin interrupción desde un punto de vista que el lector desee sin mas que leer el cuaderno el sentido adecuado, uno u otro según la interpretación elegida.

Como conclusión, el problema de buscar una familia de vectores origen de un vector dado mediante una aplicación lineal, su existencia y unicidad se reduce a discutir y resolver un sistema de ecuaciones lineales, porque de la expresión:

$$B = AX \text{ por columnas, o } B' = X'A' \text{ por filas.}$$

$$\text{Donde } B' = B^t, X' = X^t \text{ y } A' = A^t.$$

Efectuando el producto de las matrices obtendremos el conjunto e expresiones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{21}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Que constituyen un sistema con m ecuaciones lineales y n incógnitas.

*Se llama **matriz de los coeficientes** a la matriz de la aplicación en las bases dadas:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- *Al conjunto de vectores $S = \{x \in E / f(x) = b\} \subset E$, se le llama **solución del sistema.***
- ***Resolver** el sistema es hallas los originales del vector b.*
- *Si el vector b está en la imagen de E mediante la aplicación f, es decir si $\ni x \in S / f(x) = b$, se dice que es **compatible**.*
- *Si el origen del vector es único, es decir si la aplicación es inyectiva se dice que es **compatible determinado**.*
- *Si admite múltiples originales, es decir si la aplicación no es inyectiva se dice que es **compatible indeterminado**.*
- *Si b no está en la imagen de E mediante la aplicación f se dice que es **incompatible**.*
- *Si igualamos b al vector nulo de F tendremos un sistema homogéneo.*

Definición

Se llama **sistema de ecuaciones lineales** a un conjunto de igualdades de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{21}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Se dice que es un sistema con m ecuaciones y n incógnitas.

A las variables x_j, se las llama **incógnitas**.

A los números a_{ij}, se les llama **coeficientes** de las incógnitas.

A los números b_i, se les llama **términos independientes**.

Se puede escribir matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

Se llama **matriz de los coeficientes** a la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama **matriz ampliada** a la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A cada conjunto de números α_i que satisfacen todas las ecuaciones de les llama **solución del sistema.**

Resolver el sistema es hallas las soluciones.

Si un sistema admite soluciones se dice que es **compatible**.

Si la solución es única se dice que es **compatible determinado**.

Si admite múltiples soluciones se dice que es **compatible indeterminado**.

Si no admite solución se dice que es **incompatible**.

Se dice que dos **sistemas de ecuaciones** son **equivalentes** si admiten el mismo conjunto de soluciones.

Discutir un sistema es estudiar si el conjunto de soluciones es el vacío o no.

Si realizamos un cambio de base en el espacio F y expresamos las ecuaciones de la aplicación lineal en vez de en las bases B_E y B_F en las bases B_E y B'_F, tendremos:

$$Y_1 = A_1 X \text{ por columnas}$$
$$o$$
$$Y_1' = X' A_1' \text{ por filas}$$

Las matrices A y A' están relacionadas con las matrices A_1 y A_1' mediante la expresión:

$$A_1 = P^{-1} A$$
$$o$$
$$A_1' = A' P'^{-1}$$

Siendo P y P' las matrices de paso de la base B_F a la base B'_F escritas por filas o por columnas.

Si llamamos a las coordenadas del vector b respecto de la nueva base $(b'_1, b'_2, b'_3, \ldots b'_m)$, resultará una nueva expresión:

$$B_1 = A_1 X$$
$$o$$
$$B_1' = X' A_1'$$

Que son la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

*Las soluciones serán las mismas que las del sistema $B = AX$, puesto que son las coordenadas de los vectores del conjunto original de b respecto de la base B_E y diremos que ambos **sistemas** son **equivalentes**.*

Teorema fundamental de equivalencia

Sea el sistema de ecuaciones :

$$e_1 \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$e_2 \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{21}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_m \equiv a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Se dice que la ecuación obtenida como combinación lineal de las ecuaciones del sistema, $e \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$ **es una consecuencia el sistema**.

- Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una de ellas por una consecuencia del sistema en la que el coeficiente que multiplica a dicha ecuación es distinto de 0, el nuevo sistema es equivalente al primero, es decir:

El sistema $S \equiv \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ e_j = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ e_m = 0 \end{cases}$ es equivalente al sistema $S' \equiv \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \\ \ldots\ldots\ldots \\ e_m = 0 \end{cases}$ con $\lambda_j \neq 0$

Efectivamente: el sistema S' es equivalente al sistema S porque toda solución de S anula todas las ecuaciones e_i y en consecuencia anula la combinación lineal $e \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$ y es solución del sistema S'.

Toda solución de S' anula todas las ecuaciones $e_1, e_2 \ldots e_{j-i}, e_{j+1}, \ldots e_m$ y la combinación lineal queda reducida a $\lambda_j e_j$ y al ser $\lambda_j \neq 0$ tiene que anular también a e_j, por tanto también será solución de S.

- Resolver un sistema será obtener un sistema equivalente al dado de la forma:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_m = \alpha_m \end{cases}$$

Y la solución será $\alpha_i, i \in \{1,2,\ldots. m\}$.

El método de Gauss para resolver sistemas no es mas que ir pasando sucesivamente de un sistema a otro equivalente, sustituyendo determinadas ecuaciones por combinaciones lineales hasta, obtener un sistema de la forma indicada en el párrafo anterior.

Si la aplicación lineal se establece entre dos espacios de igual dimensión o es un endomorfismo, es decir:

$$f : E \to F \ \text{con: } \dim(E) = \dim(F) = n$$

La matriz asociada a la aplicación es cuadrada de orden n, $A \in M_n$ *y si además es inyectiva como el núcleo se reduce al vector nulo del primer espacio, por el teorema de la dimensión es también sobreyectiva:*

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dim(E) = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) \\ \dim(\ker f) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(E) = \dim(\operatorname{Im} f) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \dim(E) = \dim(F) \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(F) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

Y es un endomorfismo inversible.

Consideremos un endomorfismo inversible:

$$f : E \to E \ \text{con } \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(E)$$

y su expresión matricial en una base $B_E = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$:

$$Y = AX \ \textit{por columnas,}$$

$$o$$

$$Y' = X'A' \ \textit{por filas.}$$

En la que la matriz es cuadrada y regular, es decir se verifica:

$$A \in M_n \ y \ |A| \neq 0$$

Si fijamos un vector b *del espacio* E:

$$B = AX \ \textit{por columnas,}$$

$$o$$

$$B' = X'A' \ \textit{por filas.}$$

(sistema de Cramer)

Sabemos que por ser la aplicación sobreyectiva siempre tiene un origen y que además es único por ser f *inyectiva, es decir:*

$$\forall b \in E, \exists x \in E \,/\, f(x) = b \text{ y } b \text{ es único}$$

y al existir la aplicación inversa de f, *podemos escribir:*

$$x = f^{-1}(b)$$

Las ecuaciones de la aplicación lineal inversa tienen como matriz asociada la inversa de la matriz de f:

$$X = A^{-1}Y \ \textit{por columnas,}$$

$$o$$

$$X' = Y'A'^{-1} \ \textit{por filas.}$$

si las coordenadas respecto de la base B_E *vienen dadas por* $b = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$, *obtendremos:*

$$X = A^{-1}B \ \textit{por columnas,}$$

$$o$$

$$X' = B'A'^{-1} \ \textit{por filas.}$$

Expresión que nos da las coordenadas del origen del vector b *en la base* B_E.

(Regla de Cramer)

Sistemas de Cramer

Un sistema de Cramer es un sistema de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas que de ecuaciones y con la matriz de los coeficientes regular, es decir:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{21} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + ax_{n2} + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Matricialmente:

$B = AX$ por columnas,

o

$B' = X'A'$ por filas, donde: $B' = B^t, X' = X^t$ y $A' = A^t$

Con: $|A| \neq 0$

Al ser la matriz regular existe la inversa y:

$X = A^{-1}B$ por columnas,

o

$X' = B'A'^{-1}$ por filas.

Que son sistemas equivalentes a los anteriores.

Operando.

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \ldots\ldots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \ldots\ldots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \ldots\ldots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{|A|} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{|A|} \\ \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{|A|} \end{pmatrix}
$$

De donde se obtiene:

$$
x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}{|A|}
$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$$

Luego:

La solución de un sistema de Cramer es única y se obtiene el valor de cada incógnita dividiendo por el determinante de la matriz de los coeficientes, el determinante de la matriz que resulta de sustituir la columna de los coeficientes de dicha incógnita por los términos independientes.

Que es la **regla de Cramer**.

En el segundo ejemplo, para $\alpha = 2$ *y* $\beta = 2$, *si escribimos las coordenadas por columnas:*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$, luego λ_1, λ_2 y λ_3 son soluciones del sistema :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, RgA = 3 = RgA^* ,$$

y tenemos un endomorfismo biyectivo de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

es un sistema de Cramer, como es inversible podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

el origen del polinomio $1 + x + 2x^2$ *será:*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

que es el polinomio: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - x^2$

Discutir y resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Matricialmente, por columnas:

- $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow Rg(A) = 3 = n^{\circ} \text{de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema de Cramer}$$

Resolvemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{12}{-12} = -1$$

La solución es: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -1$

Generalizando:

Fijemos ahora un vector $b \in F$, $b \neq 0_F$, si existe un conjunto $S \subset E$ de vectores originales de b mediante la aplicación f, es decir que se cumpla: $x \in S / f(x) = b$

y la aplicación no es inyectiva debe verificarse que los elementos del conjunto S de los originales de b cumplan la relación $x = y + z$ siendo y un original arbitrario de b y z un vector del núcleo, como esta relación se verifica para todos los vectores del núcleo (todos se transforman en el nulo del segundo espacio), el conjunto de originales de un vector es un vector origen particular mas el núcleo de la aplicación:

$$S = \{x \in E / x = y + z, f(y) = b, \forall z \in \ker f\}$$

Si las coordenadas del vector $b \in F$ son respecto de la base B_F $(b_1, b_2, b_3 \ldots b_m)$ y las coordenadas de los vectores $x \in S$ respecto de la base B_E $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, deben satisfacer la expresión:

$$B = AX, \text{ siendo } B \text{ la matriz: } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ o } B = XA, \text{ siendo } B \text{ la matriz } (b_1, b_2, b_3 \ldots b_m).$$

(Sistema de ecuaciones lineales no homogéneo)

Si existe algún origen x del vector b, es decir si $\exists x \in E / f(x) = b$ como $f(x)$ pertenece a la imagen y ésta está generada por los transformados de los vectores de la base de E, tiene que ser combinación lineal de ellos:

$$f(x) \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f(x) = b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$$

En la matriz de la aplicación aparecen por columnas/ filas las coordenadas de los vectores transformado de la base de E respecto de la base de F:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j, \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$$

y por tanto la columna o fila de las coordenadas de b tiene que ser combinación lineal de las columnas o filas de la matriz de la aplicación:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ o}$$

$$(b_1 \quad b_2 \quad .. \quad b_m) = \alpha_1 (a_{11} \quad a_{21} \quad .. \quad a_{m1}) + \alpha_2 (a_{12} \quad a_{22} \quad .. \quad a_{m2}) + \ldots + \alpha_m (a_{1n} \quad a_{2n} \quad .. \quad a_{mn})$$

Y los coeficientes de la combinación lineal $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ son las coordenadas del vector origen x respecto de la base B_E, porque:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \text{ y si } f(x) = b \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} b_j u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j$$

Como consecuencia cuando b admita al menos un original se verifica:

$$Rg(A) = Rg(A|B)$$

La aplicación es inyectiva si una base el espacio inicial se transforma en una base de la imagen, o lo que es igual el rango de la matriz de la aplicación es igual a la dimensión del espacio inicial, luego: El origen es único si se verifica $RgA = n$.

Teorema de (Rouché-Fröebenius)

Teorema de Rouché-Fröbenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Efectivamente:

1.- Si el sistema admite una solución $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$, la expresión:

$$B = AX \text{ por columnas,}$$

o

$$B' = X'A' \text{ por filas.}$$

Se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

o

$$(b_1 \quad b_2 \quad .. \quad b_m) = \alpha_1 (a_{11} \quad a_{21} \quad .. \quad a_{m1}) + \alpha_2 (a_{12} \quad a_{22} \quad .. \quad a_{m2}) + \dots + \alpha_m (a_{1n} \quad a_{2n} \quad .. \quad a_{mn})$$

Y la columna o fila de los términos independientes es combinación lineal de las columnas o filas de la matriz de los coeficientes, luego no aumenta el rango al orlar con los términos independientes.

2.- Recíprocamente si al orlar con los términos independientes la matriz de los coeficientes el rango no varía, es que se ha introducido una combinación lineal y la columna o fila de los términos independientes es combinación lineal de las columnas o filas de la matriz de los coeficientes y por tanto los coeficientes de la combinación lineal $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$, son una solución.

Supongamos que: $r(A) = r(A^*) = h$ y que el menor principal que da rango es el compuesto por las primeras h ecuaciones y los coeficientes de las h primeras incógnitas, podemos elegir el orden de las ecuaciones para que esto ocurra sin perder generalidad. Llamaremos a las h primeras ecuaciones, **ecuaciones principales** e **incógnitas principales** a las h primeras, dejando en el primer término de todas las ecuaciones las incógnitas principales y eliminando las ecuaciones que son combinación lineal de las h primeras nos queda el sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1h}x_h = b_1 - (a_{1h+1}x_{h+1} + a_{1h+2}x_{h+2} + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2h}x_h = b_2 - (a_{2h+1}x_{h+1} + a_{2h+2}x_{h+2} + \dots + a_{2n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hh}x_h = b_h - (a_{hh+1}x_{h+1} + a_{hh+2}x_{h+2} + \dots + a_{hn}x_n) \end{cases}$$

Que es equivalente al inicial y llamamos **sistema principal**, es un sistema de Cramer al tener una matriz de orden h regular que tiene solución única para las incógnitas principales, éstas soluciones dependen de los valores asignados a las $n-h$ incógnitas no principales que tomamos como parámetros; por tanto si $h < n$ el sistema tiene infinitas soluciones, una por cada conjunto de valores asignados a los parámetros y el sistema es compatible indeterminado.

Al número de parámetros $n-h$, que tomamos para resolverlo se le llama **grado de libertad del sistema**.

Si $n = h$, el sistema es compatible determinado.

3. *Hallar el conjunto origen del par* $(1,1)$ *para* $\alpha = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de la aplicación puede ser a lo sumo dos, como la dimensión del espacio inicial es tres, ser en ningún caso puede ser inyectiva, estudiamos el rango de la matriz:

$$1 < Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{pmatrix} < 2; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} para\, \alpha = 2, Rg(A) = 1 \\ \forall \alpha \neq 2, Rg(A) = 2 \end{cases}$$

- *Para* $\alpha = 2$ *si escribimos las coordenadas de los transformados de la base del primer espacio y del par* $(1,1)$ *por columnas:*

$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 *y* λ_3 *son las coordenadas de los vectores origen respecto*

de la base dada en el primer espacio, discutimos el sistema:

$$1 < Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} < 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg(A^*) = 2 \neq Rg(A) = 1 \Rightarrow \text{sistema incompatible.}$$

- *Para* $\alpha = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es el grado de libertad del sistema es 1, utilizamos un parámetro para resolver, por ejemplo hacemos $x_3 = \lambda$ *y podemos escribir el sistema:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3\lambda \\ 1-6\lambda \end{pmatrix},$$

resolvemos y el conjunto origen es:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1-3\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Es decir son matrices simétricas de la forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1-3\lambda \\ 1-3\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

El conjunto origen de un vector no es un subespacio vectorial.

1.- Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \alpha x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

Se pide: discutir en función del parámetro α y resolver si es posible y para $\alpha = 3$:

Su expresión matricial por columnas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes puede ser a lo sumo dos, como el número de incógnitas es tres, este sistema no puede ser en ningún caso compatible determinado, estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$1 < Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{pmatrix} < 2; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} para\, \alpha = 2, Rg(A) = 1 \\ \forall \alpha \neq 2, Rg(A) = 2 \end{cases}$$

estudiamos el rango de la ampliada para cada caso:

Para $\alpha = 2$

$$1 < Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} < 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg(A^*) = 2 \neq Rg(A) = 1 \Rightarrow \text{sistema incompatible.}$$

Para $\alpha = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el número de incógnitas es 3 y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, $3 - 2 = 1$ es el grado de libertad del sistema, utilizamos un parámetro para resolver, por ejemplo hacemos $x_3 = \lambda$ y podemos escribir el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 1 - 3\lambda \\ 3x_1 + 4x_2 = 1 - 6\lambda \end{array}\right\} \text{ matricialmente: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ 1 - 6\lambda \end{pmatrix},$$

que es un sistema de Cramer, resolvemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-3\lambda & 2 \\ 1-6\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -1,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3\lambda \\ 3 & 1-6\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = 1 - 3\lambda,\ x_3 = \lambda$$

2. *Hallar los valores de* α *y* β *para que el polinomio* $1+x+\beta x^2$ *pertenezca a la imagen:*

El polinomio $1+x+\beta x^2$ *tiene que ser combinación lineal de los polinomios que generan la imagen para pertenecer a ella:*

$$\lambda_1\left(\alpha+1+x+x^2\right)+\lambda_2\left(1+(\alpha+1)x+x^2\right)+\lambda_3\left(1+x+(1-\alpha)x^2\right)=1+1x+\beta x^2$$

- *Para* $\alpha=0$, *si escribimos las coordenadas por columnas:*

$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 *y* λ_3 *son las coordenadas de los vectores origen respecto de la base dada en el primer espacio, discutimos el sistema:* $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\end{pmatrix}$

- $RgA=1=RgA^*$ si $\beta=1\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=1\Rightarrow\begin{cases}x_1=\lambda_1\\x_2=\lambda_2\\x_3=1-\lambda_1-\lambda_2\end{cases}$, *el conjunto origen son los polinomios de la forma:* $\lambda_1+\lambda_2x+\lambda_3x^2$.

- $RgA=1\neq RgA^*=2$ si $\beta\neq1$ *y el polinomio no tiene origen.*

- *Para* $\alpha=-1$, *si escribimos las coordenadas por columnas:*

$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\end{pmatrix}$, *discutimos el sistema:* $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\end{pmatrix}$

- $RgA=2=RgA^*$ si $\beta=2\Leftrightarrow\left.\begin{cases}x_2+x_3=1\\x_1+x_2+2x_3=2\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\lambda\\x_2=1\\x_3=1-\lambda\end{cases}$, *el conjunto origen son los polinomios de la forma:* $\lambda+x+(1-\lambda)x^2$

- $RgA=2\neq RgA^*=3$ si $\beta\neq2$ *y el polinomio no tiene origen.*

2.- Discutir en función de los parámetros y resolver cuando sea posible el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+1)x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+(\alpha+1)x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+(1-\alpha)x_3=\beta\end{array}\right\}$$

matricialmente por columnas:

$$\begin{pmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \beta\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$Rg\begin{pmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{pmatrix};\begin{vmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^3-\alpha^2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\text{ doble}\\ \alpha=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}para\ \alpha=0, A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, Rg(A)=1\\ para\ \alpha=-1, A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}, Rg(A)=2,\\ \forall\alpha\notin\{-1,0\}, Rg(A)=3\Leftrightarrow \text{sistema de Cramer, resuelto anteriormente para } \alpha=\beta=2.\end{cases}$$

Y para cada uno de los valores de α, estudiamos el rango de la matriz ampliada.

- Para $\alpha=-1$:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\end{pmatrix},\begin{cases}-RgA=2=RgA^*\ \text{si}\ \beta=2,\text{compatible, gardo de libertad del sistema 1.}\\ \text{Sisterma equivalente}:\left.\begin{cases}x_2+x_3=1\\x_1+x_2+2x_3=2\end{cases}\right\}, \text{una solución es}:\begin{cases}x_1=\lambda\\x_2=1\\x_3=1-\lambda\end{cases}\\ -RgA=2\neq RgA^*=3\ \text{si}\ \beta\neq2,\ \text{incompatible.}\end{cases}$$

- Para $\alpha=0$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\beta\end{pmatrix},\begin{cases}-RgA=1=RgA^*\ \text{si}\ \beta=1,\text{compatible, grado de libertad del sistema 2.}\\ \text{Sistema equivalente}:x_1+x_2+x_3=1,\ \text{una solución es}:\begin{cases}x_1=\lambda_1\\x_2=\lambda_2\\x_3=1-\lambda_1-\lambda_2\end{cases}\\ -RgA=1\neq RgA^*=2\ \text{si}\ \beta\neq1,\ \text{sistema incompatible.}\end{cases}$$

1. *Sea W el subconjunto de M_{2x2} definido por:*

$$W = \left\{ M \in M_{2x2} \,/\, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \forall \beta \in \Re \right\}$$

Hallar el conjunto origen de W, $f^{-1}(W)$ para los distintos valores de α y β.

La expresión matricial de f, respecto de las bases dadas por columnas es:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Y hallar el conjunto origen de W, $f^{-1}(W)$ para los distintos valores de α y β, será discutir en función de los parámetros y resolver, cuando sea posible, el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

- *Para $\alpha = 1$, resulta:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - \lambda \end{cases}$$ *luego el conjunto origen será:*

$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right) = 1 + \lambda x + (1 - \lambda) x^2$$

- *Para $\alpha = 2$, resulta:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$ *, el conjunto origen es:* $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = 1 + x^2$

3.- Discutir en función de los parámetros α y β, resolver en caso de ser compatible determinado y para $\beta = 2$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 = \beta \end{cases}$$

Matricialmente, por columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix},$$

estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 2; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} para\ \alpha = 1, Rg(A) = 2 \\ \forall \alpha \neq 1, Rg(A) = 3 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada:

- Para $\alpha = 1$, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - \lambda \end{cases} \text{ es la solución.}$$

- Para $\alpha = 2$, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \text{ es la solución.}$$

3. *Sea el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos definidas sobre* $\Re$, M_2^s *y* $\Re^2$ *y sus bases:* $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ *y* $B_1=\{(1,0),(0,1)\}$. *Se define la aplicación lineal* $f:M_2^S\to\Re^2$, *por:*

$$f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=(1,\alpha),\quad f\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=(2,4),\quad f\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=(3,6).$$

Se pide:
Clasificar f *(inyectiva y/o exhaustiva). En el caso de que sea sobreyectiva y para* $\alpha=3$ *hallar las ecuaciones y una base del núcleo de* f.

Nos dan los transformados de los vectores de la base del espacio inicial, que engendran la imagen de la aplicación: $\operatorname{Im} f=L((1,\alpha),(2,4),(3,6))$, *estudiamos la dependencia lineal del sistema:*
Los vectores $(2,4)$ *y* $(3,6)$ *son proporcionales, si los vectores* $(1,\alpha)$ *y* $(2,4)$ *son linealmente independientes la dimensión de la imagen será 2 y si son linealmente dependientes 1. Discutimos los valores de* α *para los cuales el sistema es libre:*

$$\lambda_1(1,\alpha)+\lambda_2(2,4)+\lambda_3(3,6)=(00),\ 1<Rg\begin{pmatrix}1&2&3\\\alpha&4&6\end{pmatrix}<2;\begin{vmatrix}1&2\\\alpha&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow$$

$$\begin{cases}para\,\alpha=2, Rg(A)=1\Leftrightarrow\dim(\operatorname{Im} f)=1\\ \forall\alpha\neq 2, Rg(A)=2\Leftrightarrow\dim(\operatorname{Im} f)=2\Leftrightarrow sobreyectiva\end{cases}$$

$\ker f=\left\{x\in M_2^S\,/\,f(x)=0_{\Re 2}\right\}$:
Para $\alpha=2$: $\lambda_1(1,2)+\lambda_2(2,4)+\lambda_3(3,6)=(0,0)$, *si escribimos las coordenadas por columnas:* $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, *el sistema homogéneo:* $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, *es la expresión matricial de las ecuaciones cartesianas del núcleo, la solución:*

$$\begin{cases}x_1=-2\lambda_1-3\lambda_2\\x_2=\lambda_1\\x_3=\lambda_2\end{cases}$$ *son las ecuaciones paramétricas y* $B_{\ker f}=\left\{\begin{pmatrix}-3&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ *una base.*

Para $\alpha=3$: $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, *son las ecuaciones cartesianas del núcleo,* $\begin{cases}x_1=0\\x_2=\lambda\\x_3=-\dfrac{2}{3}\lambda\end{cases}$ *son las ecuaciones paramétricas y* $B_{\ker f}=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&-\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\right\}$ *una base.*

En las mismas aplicaciones, vamos a buscar ahora los orígenes de vectores no nulos:

En caso de que los términos independientes sean todos nulos, vamos a discutir los sistemas anteriores:

1.- Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ \alpha x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Se pide: discutir en función del parámetro α y resolver si es posible y para $\alpha = 3$:

Su expresión matricial por columnas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de los coeficientes puede ser a lo sumo dos, como el número de incógnitas es tres, este sistema no puede ser en ningún caso compatible determinado, estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$1 < Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & 4 & 6 \end{pmatrix} < 2; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} para\, \alpha = 2, Rg(A) = 1 \\ \forall \alpha \neq 2, Rg(A) = 2 \end{cases}$$

Ahora el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de los coeficientes porque añadimos una columna de ceros:

Para $\alpha = 2$

$$Rg(A^*) = Rg(A) = 1 \Rightarrow \text{sistema compatible, el grado de libertad es } 2 = 3 - 1.$$

utilizamos un parámetro para resolver, por ejemplo hacemos $x_3 = \lambda$ y podemos escribir el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -3\lambda \\ 3x_1 + 4x_2 &= -6\lambda \end{aligned}\right\} \text{ matricialmente: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda \\ -6\lambda \end{pmatrix},$$

que es un sistema de Cramer, resolvemos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3\lambda & 2 \\ -6\lambda & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = 0,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3\lambda \\ 3 & -6\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -3\lambda,\ x_3 = \lambda$$

Para $\alpha = 3$

$$Rg(A^*) = Rg(A) = 2 \Rightarrow \text{sistema compatible, el grado de libertad es } 1 = 3 - 2.$$

utilizamos un parámetro para resolver, por ejemplo hacemos $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$ y podemos escribir el sistema:

$$x_1 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2\},\ \text{la solución es: } x_1 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2,\ x_2 = \lambda_1,\ x_3 = \lambda_2$$

2. *Sea el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales* $P_2(\Re)$ *y la base* $B=\{1,x,x^2\}$. *Se define el endomorfismo* f *por:* $f(1+x)=\alpha+2+(\alpha+2)x+2x^2$, $f(1-x)=\alpha-\alpha x$, $f(1-x^2)=\alpha+\alpha x^2$.
Se pide:
Clasificar f *(inyectiva y/o exhaustiva) y En el caso de que no sea inyectiva hallar el núcleo de* f.

Hallamos los transformados de los vectores de la base:

$$f(1)=\alpha+1+x+x^2,\ f(x)=1+(\alpha+1)x+x^2,\ f(x^2)=1+x+(1-\alpha)x^2$$

Estudiamos la dependencia lineal del sistema generador de la imagen:

$$\lambda_1(\alpha+1+x+x^2)+\lambda_2(1+(\alpha+1)x+x^2)+\lambda_3(1+x+(1-\alpha)x^2)=0+0x+0x^2$$

Es equivalente a discutir el rango de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores del sistema, $f(1)=(\alpha+1,1),\ f(x)=(1,\alpha+1,1),\ f(x^2)=(1,1,1-\alpha)$:

$$Rg\begin{pmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{pmatrix};\begin{vmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^3-\alpha^2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0 \text{ doble}\\ \alpha=-1\end{cases}$$

$$\forall\alpha\notin\{-1,0\},Rg(A)=3\Leftrightarrow\dim(\operatorname{Im}f)=3\Leftrightarrow\text{sobreyectiva},\quad para\,\alpha=-1,A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

$$Rg(A)=2\Leftrightarrow\dim(\operatorname{Im}f)=2\ \text{ y }\ para\ \alpha=0,A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},Rg(A)=1\Leftrightarrow\dim(\operatorname{Im}f)=1$$

$\ker f=\{p(x)\in P_2(\Re)/f(p(x))=0_{P2(\Re)}\}$:

$$\lambda_1(\alpha+1+x+x^2)+\lambda_2(1+(\alpha+1)x+x^2)+\lambda_3(1+x+(1-\alpha)x^2)=0+0x+0x^2$$

si escribimos las coordenadas por columnas: $\lambda_1\begin{pmatrix}\alpha+1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\\alpha+1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, *como*

λ_1, λ_2 *y* λ_3 *son las coordenadas de los vectores origen respecto de la base dada en el primer espacio:* $\begin{pmatrix}\alpha+1&1&1\\1&\alpha+1&1\\1&1&1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, *son las ecuaciones cartesianas del núcleo.*

Para $\alpha=0$, *resulta* $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=\lambda_1\\x_2=\lambda_2\\x_3=-\lambda_1-\lambda_2\end{cases}$

Y una base será: $B_{Kerf}=\{1-x^2,x-x^2\}$

Para $\alpha=-1$, *resulta* $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\lambda\\x_2=\lambda\\x_3=-\lambda\end{cases}$

Y una base será: $B_{Kerf}=\{1+x-x^2\}$.

Para $\alpha\notin\{-1,0\}$, *sistema compatible determinado solo admite la solución trivial y el núcleo se reduce al vector nulo (polinomio nulo).*

2.- Discutir en función del parámetro y resolver cuando sea posible el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+1)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(\alpha+1)x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+(1-\alpha)x_3=0\end{array}\right\}$$

matricialmente por columnas:

$$\begin{pmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$Rg\begin{pmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{pmatrix};\begin{vmatrix}\alpha+1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha+1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\alpha\end{vmatrix}=-\alpha^3-\alpha^2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\text{ doble}\\ \alpha=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}para\ \alpha=0, A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, Rg(A)=1\\ para\ \alpha=-1, A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, Rg(A)=2,\\ \forall\alpha\notin\{-1,0\}, Rg(A)=3.\end{cases}$$

Al orlar los menores que dan rango con una columna de ceros éste no aumenta y en todos los casos el sistema es compatible.

- Para $\alpha=-1$:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{cases}-RgA=2=RgA^*\text{, compatible, gardo de libertad del sistema 1.}\\ \text{Sisterma equivalente}:\left\{\begin{array}{l}x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+2x_3=0\end{array}\right\}\text{, una solución es}:\begin{cases}x_1=\lambda\\ x_2=\lambda\\ x_3=-\lambda\end{cases}\end{cases}$$

- Para $\alpha=0$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{cases}-RgA=1=RgA^*\text{, compatible, grado de libertad del sistema 2.}\\ \text{Sistema equivalente}: x_1+x_2+x_3=1\text{, una solución es}:\begin{cases}x_1=\lambda_1\\ x_2=\lambda_2\\ x_3=1-\lambda_1-\lambda_2\end{cases}\end{cases}$$

- Para $\alpha\notin\{-1,0\}$, el sistema es compatible determinado y la solución es: $x_1=0$, $x_2=0$ $x_3=0$

Como ejemplo vamos a resolver tres problemas:

1. *Sea el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales* $P_2(\Re)$ *y el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos definidas sobre* $\Re$, M_{2x2}, *sea* $B_1 = \{1, x, x^2\}$ *una base de* $P_2(\Re)$ *y* $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *base de* M_{2x2}. *Se define la aplicación lineal* f *de* $P_2(\Re)$ *en* M_{2x2}, *por:* $f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a & \alpha b + c \\ b + c & a \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) *Clasificar* f *(inyectiva y/o exhaustiva).*

b) *En el caso de que no sea inyectiva hallar el núcleo de* f.

a) Hallamos los transformados de los vectores de la base del espacio inicial que engendran la imagen: $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *como* $\dim(M_2) = 4$ *y la imagen a lo sumo tiene dimensión 3* ***nunca*** *puede ser* ***sobreyectiva.***

La imagen del endomorfismo está engendrada por los vectores transformados de la base: $\operatorname{Im} f = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

Estudiamos la dependencia lineal del sistema generador de la imagen:
Si los tres vectores son linealmente independientes la dimensión de la imagen es 3 y una base del primer espacio se transforma en un sistema libre, por tanto será inyectiva, para ello discutimos los valores de α *para los cuales el sistema es libre:*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ *estudiamos el rango de la matriz:*

$$Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 2; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} para\ \alpha = 1, Rg(A) = 2 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 2 \\ \forall \alpha \neq 1, Rg(A) = 3 \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3 \Leftrightarrow inyectiva \end{cases}$$

b) El núcleo de f *es:* $\ker f = \{x \in P_2(\Re) / f(x) = 0_{M2x2}\}$.
Escribimos por columnas las ecuaciones cartesianas del núcleo, para $\alpha = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda \end{cases}$ *son las ecuaciones paramétricas del núcleo y*

$B_{\ker f} = \{x - x^2\}$ *una base del mismo.*

3.- Discutir en función del parámetro α , resolver cuando sea posible:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Matricialmente, por columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 2; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} para\ \alpha = 1, Rg(A) = 2 \\ \forall \alpha \neq 1, Rg(A) = 3 \end{cases}$$

El rango de la matriz ampliada será el mismo en todos los casos:

- Para $\alpha = 1$, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda \end{cases} \text{ es la solución.}$$

- Para $\alpha \neq 1$, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{ es la solución.}$$

En estos casos los sistemas siempre son compatibles, al no tener términos independientes todos admiten la solución $x_i = 0, \forall i \in \mathrm{N}$ y si son compatibles determinados solo admiten esta solución.

Este tipo de sistemas se llaman:

La expresión matricial de una aplicación lineal respecto de dos bases de los espacios vectoriales $B_E = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ *y* $B_F = \{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ *será:* $Y = AX$ por columnas, o $Y' = X'A'$ *por filas.*

Siendo $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *las coordenadas de un vector genérico* x *de* E *respecto de* B_E, $x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, *colocadas en una matriz* X / X' *por columnas/filas,* $(y_1, y_2, \ldots y_m)$ *las coordenadas respecto de* B_F *del transformado de* x *mediante la aplicación lineal* f, $y = f(x) \in \operatorname{Im} f \subset F, y = \sum_{j=1}^{m} y_j u_j$, *colocadas en una matriz* Y / Y' *por columnas/filas y* A / A' *la matriz asociada a la aplicación lineal, que tiene por columnas/filas las coordenadas de los transformados de la base* B_E *respecto de la base* B_F. $f(e_i) = \sum_{j=i}^{m} a_{ij} u_j$, $\forall i \in 1,2,3 \ldots n$.

Sabemos que los transformados por la aplicación lineal de las vectores de la base del espacio inicial engendran la imagen, $\operatorname{Im} f = L(\{f(e_1), f(e_2) \ldots f(e_n)\})$.

El núcleo de la aplicación lineal es el conjunto de vectores del espacio E *que se transforman en el vector nulo del espacio* F: $\ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} \subset E$, *es decir los originales del vector nulo. Como las coordenadas del vector nulo* 0_F *son todas* 0 *en cualquier base basta con sustituir en la expresión matricial de la aplicación lineal las coordenadas del vector transformado por* 0, *resulta:* $O = AX$ *por columnas, o* $O' = X'A'$ *por filas. Que constituyen las ecuaciones del núcleo de la aplicación que es un subespacio vectorial de* E.
<u>Es la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.</u>

Sabemos que en toda aplicación lineal, el vector nulo del primer espacio se transforma en el vector nulo del segundo espacio, $f(0_E) = 0_F$, *por tanto el núcleo, al menos contiene al vector nulo del primer espacio:* $0_E \in \ker f$ *(Un sistema homogéneo siempre es compatible).*

Si el sistema homogéneo es ***compatible determinado, admite una única solución*** *que es* ***la trivial*** *y esto se verifica* ***si la aplicación es inyectiva***, *porque entonces el núcleo se reduce al vector nulo:*

$$si\ \forall f(x), f(y) \in \operatorname{Im} f, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,\ entonces\ \ker f = \{0_E\}$$

Efectivamente:

a) $$\left.\begin{array}{r} si\ \forall f(x), f(y) \in \operatorname{Im} f, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \\ como\ f(0_E) = 0_F \end{array}\right\} \Rightarrow \ker f = \{0_E\}$$

además si el núcleo se reduce al vector nulo es una aplicación inyectiva:

b) $$\left.\begin{array}{l} si\ \forall f(x), f(y) \in \operatorname{Im} f, f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0_F \\ por\ ser\ aplicación\ lineal: \quad f(x) - f(y) = f(x-y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x-y) = 0_F$$

Luego: $x - y = f^{-1}(0_F)$, *si el núcleo se reduce al vector nulo de* E, *resulta:*

$$\left.\begin{array}{l} \ker f = \{0_E\} \\ y \\ x - y = 0_E \end{array}\right\} \Rightarrow x = y,\ y\ la\ aplicación\ es\ inyectiva$$

La condición es necesaria y suficiente.

Ahora bien si no es así, existirán vectores z *diferentes del nulo de* E *que se transformen en el nulo de* F:

$$Si\ \exists z \in E, z \neq 0_E / f(z) = 0_F, x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$$

y habrá vectores del segundo espacio con mas de un origen, no será inyectiva.

El sistema homogéneo será ***compatible indeterminado si la aplicación no es inyectiva.***

Sistemas homogéneos

Un sistema homogéneo es un sistema de ecuaciones lineales con los términos independientes todos nulos:

$$O = AX \text{ por columnas,}$$

o

$$O' = X'A' \text{ por filas.}$$

Por el teorema de Rouché-Fröebenius siempre es compatible, pues al orlar el menor de la matriz de los coeficientes que da rango con una columna/fila de ceros el determinante del menor principal de la matriz ampliada no aumenta, si llamamos h al rango de ambas matrices, siempre se verifica:

$$r(A) = r(A^*) = h$$

Por otra parte, una solución de un sistema homogéneo es en cualquier caso la solución:

$$(0,0,....0), \alpha_i = 0, \forall i \in \{1,2,...m\}$$

Que llamamos **solución trivial**, efectivamente verifica en cualquier caso:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \text{con } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 .... = 0$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .. & a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & .. & a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1n} & a_{2n} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = 0$$

Si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al número de incógnitas, $h = n$ el sistema es compatible determinado y **solo admite la solución trivial**.

Si el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas, $h < n$ admite, **además de la solución trivial más soluciones**, el sistema es compatible indeterminado, las soluciones **dependen de** $n - h$ **parámetros**.

Un caso interesante es cuando $Rg(A) = h = n - 1$, supongamos sin perder generalidad que el menor principal está compuesto por los coeficientes de las $n-1$ primeras ecuaciones y las $n-1$ primeras incógnitas, por Crameer:

$$x_i = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1i-1} & 0 & a_{1i+1} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2i-1} & 0 & a_{2i+1} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n-11} & a_{n-12} & .... & a_{n-1i-1} & 0 & a_{n-1i+1} & .... & a_{n-1n} \end{pmatrix}}{|A_{nn}|} \quad \forall i \in \{1,2,....n\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{|A_{ni}|}{|A_{nn}|}, \forall i \in \{1,2,...n\}, \text{ por tanto:}$$

$$\frac{x_1}{|A_{n,1}|} = \frac{x_2}{|A_{n,2}|} = ...= \frac{x_n}{|A_{nn}|} = \frac{1}{|A_{nn}|} = \lambda$$

Luego las soluciones son proporcionales **a** los adjuntos de la última fila de la matriz de los coeficientes, cuando el grado e libertad el sistema es 1.

Nota: Si el lector no conoce las aplicaciones lineales, dé la vuelta al cuaderno y lea las páginas impares.

Dada una aplicación lineal $f:(E+,\cdot\Re)\rightarrow(F+,\cdot\Re)$

y fijado un vector $b\in F$

$$¿\exists x\in E\,/\,f(x)=b?$$

Sean dos espacios vectoriales E y F definidos sobre el mismo cuerpo K, de dimensiones n y m respectivamente y una aplicación lineal f definida entre ellos:

$$f:E\rightarrow F$$

Nos planteamos: fijado un vector del espacio final, ¿tiene origen o no? y si lo tiene, ¿éste es único, o tiene mas de uno?.

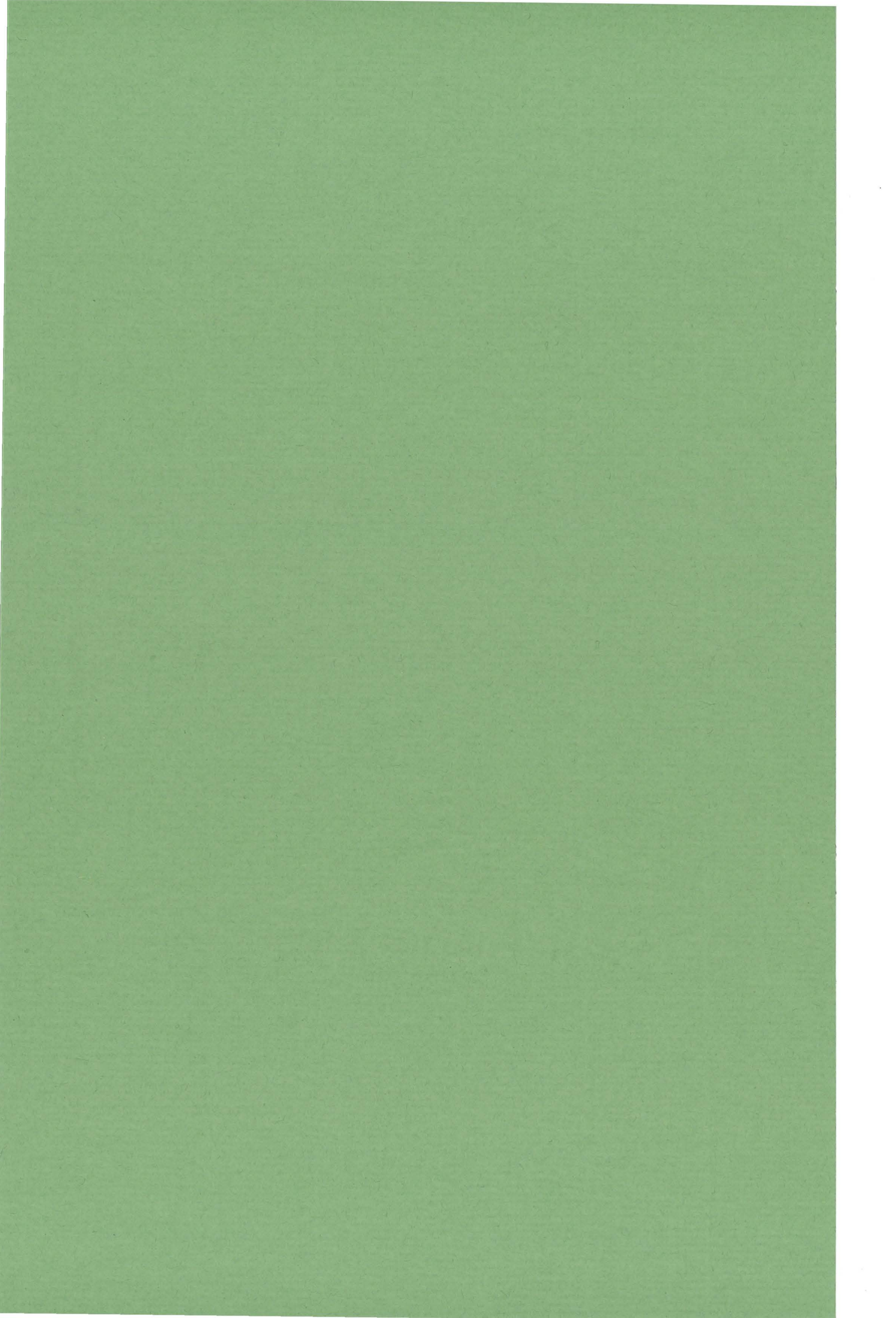
El problema planteado es discutir la existencia de dicho origen, discutir su unicidad y encontrarlo si es posible.

El planteamiento el problema anterior nos llevará a la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Comenzaremos por un caso particular y especialmente interesante, encontrar los originales del vector nulo del espacio final, para después buscar los orígenes de cualquier vector de dicho espacio.

NOTAS

NOTAS



CUADERNO

199.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

84-9728-176-4

